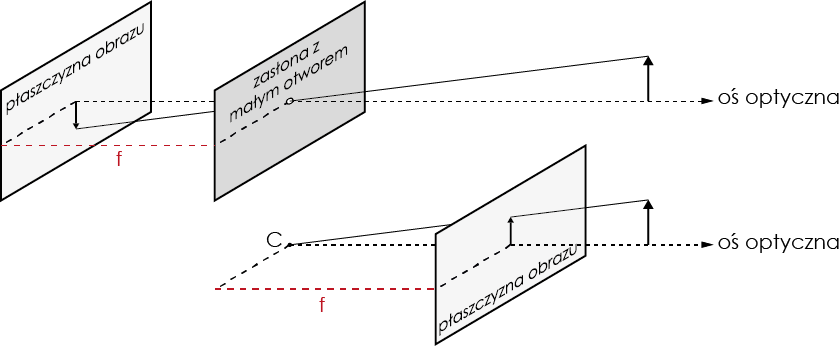
### Model matematyczny kamery

Współczesne aparaty cyfrowe, kamery, czy telefony posiadają często stosunkowo złożone systemy optyczne. Wszystkie te urządzenia znajdują jednocześnie zastosowanie w różnego rodzaju systemach wizyjnych jako elementy akwizycji obrazu. Dla takich zastosowań konieczne jest stworzenie matematycznego modelu, który pozwoli opisać związek pomiędzy obiektem 3D, a jego obrazem zarejestrowanym przez kamerę. Naturalnie im bardziej złożona jest jej wewnętrzna budowa, tym trudniej taki model zbudować. W praktyce więc, często korzysta się z przybliżenia w postaci prostego modelu kamery otworkowej, który następnie w miarę potrzeb uzupełnia się i rozszerza.

Ogólna koncepcja

Kamera otworkowa przedstawiana jest zwykle jako zamknięte pudełko o czarnym wnętrzu i mały otworze na jednej ze ścian. Promienie świetlne, które przez przejdą przez otwór w zasłonie, tworzą wewnątrz pudełka odwrócony obraz obserwowanego przedmiotu.

W podobny sposób przedstawia to rysunek 1.1.1.1 a. W ramach matematycznych uproszczeń, rysunek ten można zmodyfikować tak, aby obraz przedmiotu nie był odwrócony. W tym celu przenosi się płaszczyznę obrazu między obserwowany obiekt a zasłonę, zachowując jednocześnie odległość f między aperturą/środkiem kamery C i rzutnią.

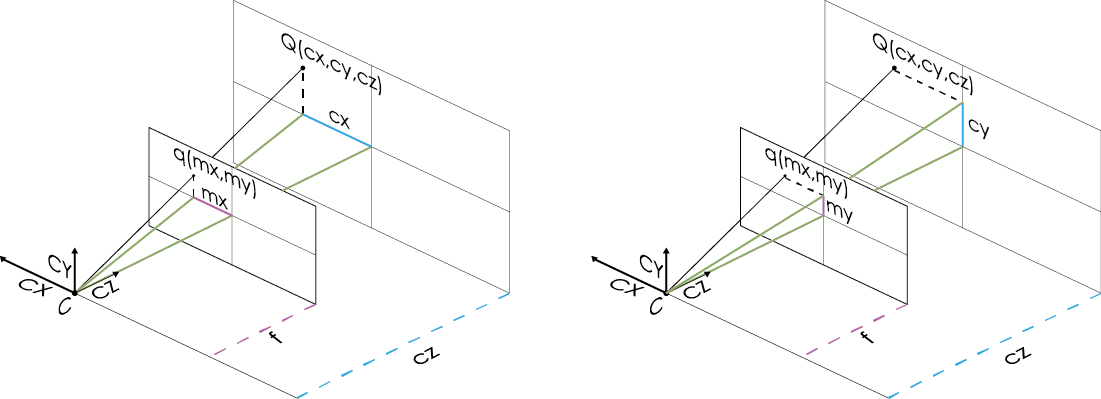


Rysunek 1.1.1.1 Model kamery otworkowej. Promienie przechodzące przez otwór w zasłonie tworzą obraz   
na płaszczyźnie obrazu. f – ogniskowa układu. C - środek projekcji/kamery.

Rzutowanie perspektywiczne

Z rysunku 1.1.1.1 b widać, że podczas rejestracji obrazu obiektów trójwymiarowych dochodzi do mapowania punktów z przestrzeni 3D do 2D. W przypadku modelu kamery otworkowej rzutowanie odbywa się pomiędzy:

* Układem współrzędnych kamery UWK, w początku którego leży środek kamery C, i którego oś CZ pokrywa się z osią optyczną.
* Układem współrzędnych metrycznych obrazu UWMO, związanym z położeniem punktu q, będącym obrazem rzutu punktu przestrzennego Q na płaszczyźnie obrazu.



Rysunek 1.1.1.2 Rzutowanie perspektywiczne. Obraz rzutu punktu przestrzennego Q powstaje na płaszczyźnie obrazu w miejscu q, gdzie promień rzutujący, łączący punkt Q i środek projekcji C przebija rzutnię.

Korzystając z podobieństwa trójkątów, łatwo można wyrazić związek pomiędzy położeniem punktu q na rzutni, a punktem Q w przestrzeni 3D.

( 1.. )

( 2.. )

proces projekcji przebiega więc w sposób

( 3.. )

to samo wyrażenie we współrzędnych jednorodnych wygląda następująco

( 4.. )

Przechodząc dalej do postaci macierzowej, transformację tę można przedstawić w postaci

( 5.. )

Przyjmując, że pierwsza macierz jest macierzą projekcji P, związek pomiędzy punktem przestrzennym Q i odpowiadającym mu punktem na obrazie q wyraża się wzorem

( 6.. )

Macierz P ma wymiary 3x4 i jest złożeniem wszystkich transformacji jakie konieczne są do przejścia pomiędzy układami 3D i 2D.

W trakcie omawiania procesu rzutowania perspektywicznego w tym akapicie, skorzystano ze współrzędnych jednorodnych oraz przekształceń geometrycznych. Zagadnienia te nie były wcześniej omawiane, a ponieważ ich znajomość jest niezbędna do zrozumienia całego procesu rzutowania, dlatego warto przyjrzeć się im bliżej.

Transformacje i współrzędne jednorodne

W szeroko rozumianej grafice komputerowej, robotyce i nie tylko, przekształcenia w przestrzeni i zaliczane są do elementarnych operacji. Do najważniejszych wśród nich należą.:

* Przesunięcie

( 7.. )

* Obrót

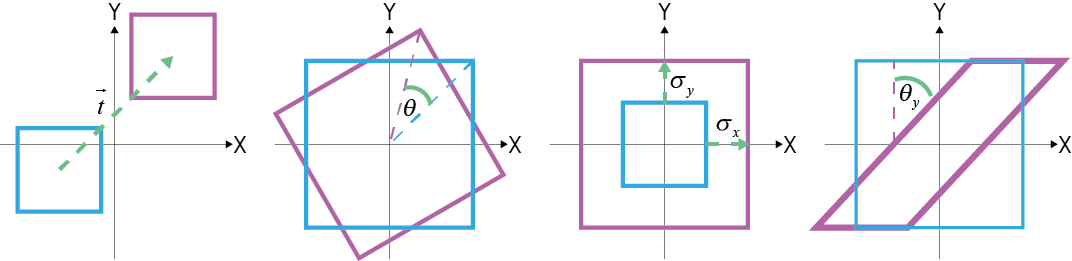
( 8.. )

* Skalowanie

( 9.. )

* Pochylenie

( 10.. )



Rysunek 1.1.1.3 Podstawowe przekształcenia geometryczne na płaszczyźnie.   
Kolejno od lewej: przesunięcie, obrót, skalowanie, pochylenie.

Podczas pracy z przekształceniami geometrycznymi korzysta się głównie z rachunku macierzowego. Jest to podyktowane prostotą zapisu i efektywnością obliczeń, zwłaszcza w obszarze grafiki komputerowej. Położenie punktu można wtedy przedstawić jako wektor liczb. We współrzędnych kartezjańskich jest równe wymiarowi przestrzeni.

W takim układzie współrzędnych, pokazane na rys. 1.1.1.4 przekształcenia można zapisać w formie macierzy transformacji. Wynikiem zastosowania przekształcenia obrotu, skalowania lub pochylenia jest więc iloraz macierzy transformacji i wektora położenia punktu. W przypadku przesunięcia nie ma innej możliwości zapisu jak tylko suma dwóch wektorów: położenia i przesunięcia. Ta niejednolita notacja uniemożliwia wykonanie złożenia np. translacji i rotacji, czyli zapisania tych dwóch przekształceń w postaci jednej macierzy.

Rozwiązaniem tego problemu jest użycie współrzędnych jednorodnych, w których punkt   
opisany przez współrzędnych kartezjańskich reprezentowany jest przez współrzędnych rzutowych/jednorodnych.

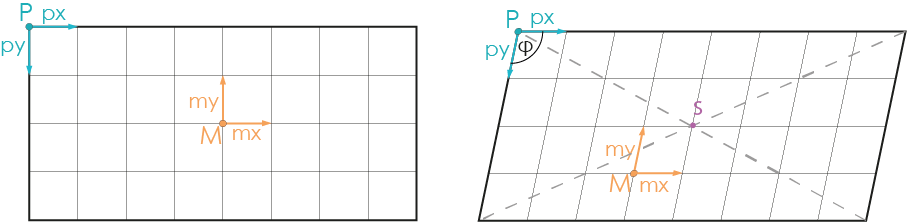
( 11.. )

Taki sposób zapisu pozwala wyrazić każdą transformację w przestrzeni w postaci macierzy , a w przestrzeni w postaci macierzy . W konsekwencji możliwe jest złożenie dowolnej liczby przekształceń zapisując je jako macierz będącą iloczynem składowych macierzy transformacji.

Układy współrzędnych

Na początku tego rozdziału, omawiając rzutowanie perspektywiczne wprowadzono układ współrzędnych kamery UWK, w którym zdefiniowano położenie kamery jako początek tego układu, a także wyrażono współrzędne punktu przestrzennego Q. Naturalnie, kamera i obiekty które są przez nią rejestrowane najczęściej nie są ze sobą połączone i nie poruszają się razem. Wynika stąd, że punkt Q nie należy do układu UWK, niemniej może – dzięki przedstawionym wcześniej transformacjom – zostać wyrażone w tym układzie jego położenie. Zarówno układ UWK jak i obiekty które są obserwowane przez kamerę definiuje się w globalnym układzie współrzędnych UWG.

Rzutując punkt 3D na płaszczyznę, położenie obrazu jego rzutu można wyrazić za pomocą jednostek metrycznych, tj. układzie UWMO lub za pomocą pikseli – we współrzędnych pikselowych obrazu UWPO. Jest to uzasadnione, ponieważ we współczesnych aparatach, rolę płaszczyzny obrazu pełni najczęściej matryca CCD lub CMOS. W dużym uproszczeniu są to macierze bardzo małych prostokątnych elementów światłoczułych. Zarejestrowany przez nie obraz jest więc gęstą macierzą pojedynczych prostokątów – pikseli.



Rysunek 1.1.1.4 Matryca CMOS/CCD zbudowana z 8x4 prostokątnych elementów światłoczułych. Układ   
współrzędnych UWPO zaczepiony jest w lewym górnym rogu matrycy. Oś optyczna przechodzi przez początek   
układu UWMO, który na rys. a znajduje się w środku płaszczyzny obrazu S, a na rys. b jest względem niego przesunięty.

W idealnym przypadku – rysunek 1.1.1.2. a - matryca CCD/CMOS jest:

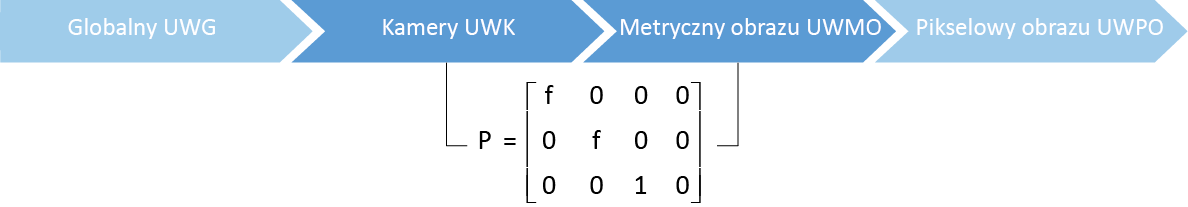
* zbudowana z kwadratowych elementów światłoczułych
* ustawiona prostopadle do osi optycznej, która przechodzi przez jej środek

W rzeczywistości, tak jak ilustruje to rysunek 1.1.1.2 b matryca może:

* posiadać elementy światłoczułe w kształcie równoległoboku - jest to bardzo rzadkie
* nie być ustawiona prostopadle do osi optycznej, co skutkuje pojawieniem się zniekształceń obrazu w rodzaju dystorsji tangencjalnej
* oś optyczna może nie przechodzić przez środek matrycy

Przejście z UWG do UWPO

W poprzedniej części tego rozdziału omówiono cztery układy współrzędnych, jakie towarzyszą w pracy z modelem kamery otworkowej. Przedstawiono również macierz projekcji P która pozwalała przeliczyć współrzędne z układu kamery do układu metrycznego obrazu.



Rysunek 1.1.1.5 Schemat przejścia ze współrzędnych globalnych do współrzędnych pikselowych obrazu.

Docelowo jednak, macierz P powinna wiązać położenie punktu 3D zdefiniowanego w układzie globalnym, z położeniem tego w układzie współrzędnych pikselowych obrazu. W tym celu należy rozszerzyć obecną macierz projekcji o dodatkowe przekształcenia geometryczne które umożliwią transformację pomiędzy UWG, a UWPO.

Transformacja UWMO - UWPO

Chcąc wyrazić położenie punktu na obrazie nie w jednostkach metrycznych jak dotychczas ale w pikselach, konieczna jest transformacja pomiędzy UWMO, a UWPO. Wiąże się to z zastosowaniem:

* skalowania

Matryca aparatu ma swoje wymiary fizyczne, np. 23,6 x 15,7 mm. Jej rozmiar jest również określony poprzez rozdzielczość, np. 5184 x 3456 pikseli. Stosunki tych wielkości, odpowiednio dla pierwszej i drugiej współrzędnej pozwalają określić położenie punktu na obrazie, zarówno w jednostkach metrycznych, jak również w pikselach

( 13.. )

( 14.. )

* translacji

Zgodnie z zamieszczonym wcześniej rysunkiem 1.1.1.4 układ współrzędnych UWMO zaczepiony jest w punkcie, gdzie oś optyczna przebija płaszczyznę obrazu. Początek układu UWPO położony jest natomiast w lewym górnym jej rogu. Oba układy są więc przesunięte względem siebie o i .

* pochylenia

Pochylenie, jest w tym przypadku związane z kształtem elementów światłoczułych matrycy, współczynniki pochylenia i zależą od kąta pomiędzy osiami układu UWPO. Zwykle jednak są one prostopadłe względem siebie, więc nie uwzględnia się tej transformacji w obliczeniach.

Uaktualniona macierz projekcji P powinna zatem przybrać postać

( 15.. )

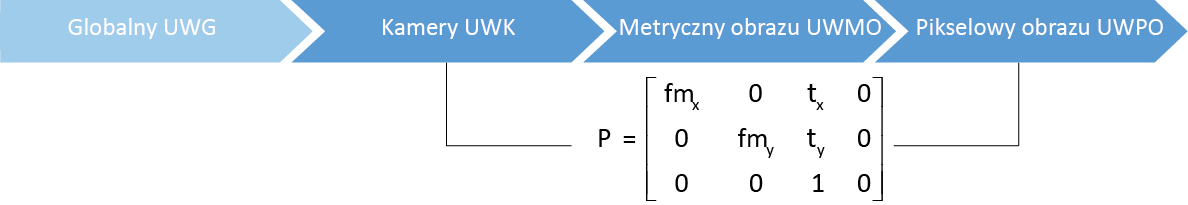
W równoważnej, skróconej formie można zapisać ją jako

( 16.. )

,gdzie K jest macierzą kalibracji, I macierzą jednostkową 3x3, a 0 zerowym wektorem kolumnowym

( 17.. )

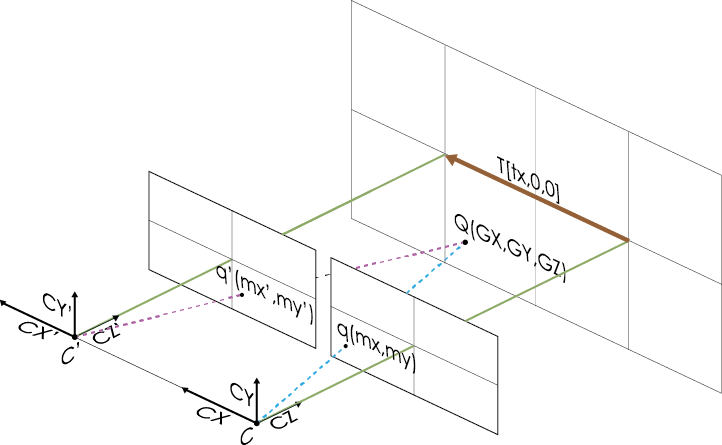
natomiast I to macierz jednostkowa o wymiarach 3x3, a 0 jest zerowym wektorem kolumnowy



Rysunek 1.1.1.6 Transformacja pomiędzy układami współrzędnych UWK i UWPO

Transformacja UWG - UWK

Ostatnim etapem w ramach omawianego dotąd potoku transformacji, jest przejście ze współrzędnych globalnych UWG do układu współrzędnych kamery UWK.



Rysunek 1.1.1.7 Związek pomiędzy dwoma układami współrzędnych

Podążając za rysunkiem, załóżmy, że kamerą C, wykonano zdjęcie punktu Q. Następnie przesunięto kamerę tak, że jej środek znalazł się w punkcie C’ i ponownie wykonano zdjęcie punktu Q. Korzystając z tego, że globalny układ współrzędnych może być dowolnie zdefiniowany w przestrzeni, przyjmijmy więc dla uproszczenia, że jego osie pokrywają się z osiami CX, CY i CZ. W takim przypadku, związek pomiędzy globalnym układem współrzędnych, a układem kamery C’ sprowadza się do określenia jak zmieniła się orientacja i położenie kamery podczas wykonywania pierwszego i drugiego zdjęcia.

Jeżeli za przyjąć współrzędne punktu Q w układzie globalnym, czyli w tym przypadku związanym z kamerą C wykonującą pierwsze zdjęcie, a za jego współrzędne w układzie kamery wykonującej drugie zdjęcie, wtedy związek pomiędzy tymi dwoma układami współrzędnych można wyrazić poprzez wektor przesunięcia i macierz obrotu, a samą transformację z układu UWG do UWK jako

( 18.. )

,gdzie R to macierzą obrotu określająca orientacje układu UWK względem UWG, natomiast to położenie środka kamery C’ we współrzędnych globalnych.

( 19.. )

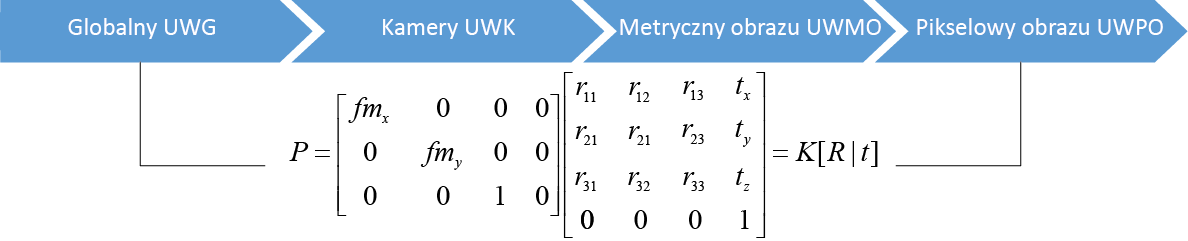
( 20. )

Korzystając z rachunku macierzowego, wyrażenie 19.1.1.1.19 można zapisać w postaci

( 21.. )

Przemnażając przez siebie składowe macierze obrotu i przesunięcia, można uzyskać pojedynczą macierz, która jest złożeniem tych dwóch przekształceń geometrycznych.

( 22.. )

Ostatecznie więc, transformacja współrzędnych punktu z układu UWG do UWPO przebiega według poniższego schematu.  
  


Rysunek 1.1.1.8 Transformacja z układu współrzędnych UWG do UWPO