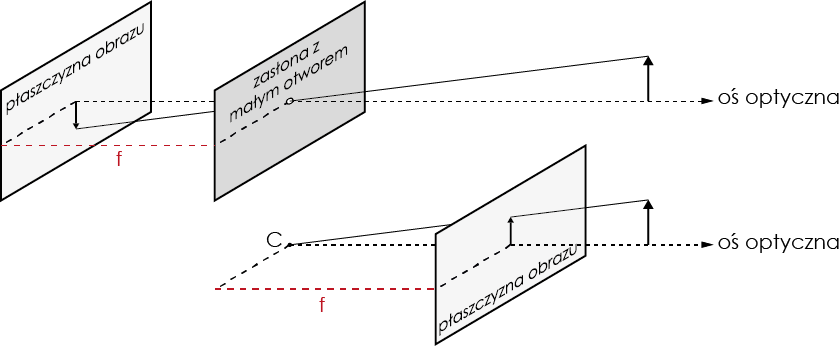
### Model matematyczny kamery

Współczesne aparaty cyfrowe, kamery, czy telefony posiadają często stosunkowo złożone systemy optyczne co przekłada się na jakością otrzymywanych przez nie zdjęć. Wszystkie te urządzenia znajdują jednocześnie zastosowanie w różnego rodzaju systemach wizyjnych jako elementy akwizycji obrazu. W przypadku takich zastosowań konieczne jest stworzenie matematycznego modelu, który pozwoli opisać związek pomiędzy obiektem 3D, a jego obrazem zarejestrowanym przez kamerę. Naturalnie im bardziej złożona jest wewnętrzna budowa aparatu, tym trudniej jest taki model zbudować. W praktyce, często korzysta się z przybliżenia w postaci prostego modelu kamery otworkowej, który następnie w miarę potrzeb uzupełnia się i rozszerza.

Ogólna koncepcja

Kamera otworkowa przedstawiana jest zazwyczaj jako zamknięte pudełko o czarnym wnętrzu z małym otworem na jednej ze ścian. Czarne wykończenie ma zminimalizować wewnętrzne odbicia i rozproszenia światła. Promienie świetlne, które przejdą przez otwór w zasłonie tworzą wewnątrz pudełka odwrócony obraz obserwowanego przedmiotu. Obraz ten powstaje na ścianie przeciwnej do tej w której znajduje się otwór. W podobny sposób przedstawia to rysunek 1.1.1.1 a. W ramach matematycznych uproszczeń, rysunek a można zmodyfikować tak, aby obraz przedmiotu nie był odwrócony. W tym celu przenosi się płaszczyznę obrazu między obserwowany obiekt a zasłonę, zachowując jednocześnie odległość f między aperturą/środkiem kamery C i płaszczyzną obrazu.

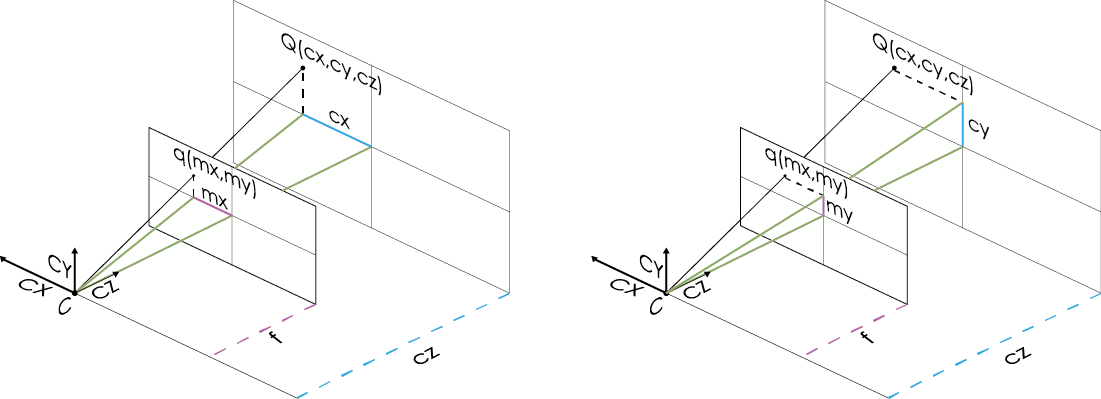


Rysunek 1.1.1.1 Model kamery otworkowej. Promienie przechodzące przez otwór w zasłonie tworzą obraz   
na ścianie za płaszczyźnie obrazu. f – ogniskowa układu. C - środek projekcji/kamery.

Rzutowanie perspektywiczne

Z rysunku 1.1.1.1 b widać, że podczas rejestracji obrazu obiektów 3D dochodzi do mapowania pomiędzy dwoma układami współrzędnych:

* Układem współrzędnych kamery UWC – którego początek zdefiniowany jest przez środek kamery C, i którego oś CZ pokrywa się z osią optyczną.
* Metrycznym układem współrzędnych obrazu M - związanym z położeniem punktu q, będącym obrazem rzutu punktu przestrzennego Q na płaszczyźnie obrazu.



Rysunek 1.1.1.2 Rzutowanie perspektywiczne. Obraz rzutu punktu przestrzennego Q powstaje na płaszczyźnie obrazu w miejscu q, gdzie promień rzutujący, łączący punkt Q i środek projekcji C przebija rzutnię.

Korzystając z podobieństwa trójkątów, łatwo można wyrazić związek pomiędzy położeniem punktu q na płaszczyźnie obrazu, a punktem Q w przestrzeni.

( 1.**Błąd! Użyj karty Narzędzia główne, aby zastosować 0 do tekstu, który ma się tutaj pojawić.**. )

( 2.**Błąd! Użyj karty Narzędzia główne, aby zastosować 0 do tekstu, który ma się tutaj pojawić.**. )

Można więc zapisać, że proces rzutowania punktu 3D do układu 2D przebiega w sposób

( 3.**Błąd! Użyj karty Narzędzia główne, aby zastosować 0 do tekstu, który ma się tutaj pojawić.**. )

To samo wyrażenie we współrzędnych jednorodnych wygląda następująco

( 4.**Błąd! Użyj karty Narzędzia główne, aby zastosować 0 do tekstu, który ma się tutaj pojawić.**. )

Przechodząc dalej do postaci macierzowej, transformację tę można przedstawić w postaci

( 5.**Błąd! Użyj karty Narzędzia główne, aby zastosować 0 do tekstu, który ma się tutaj pojawić.**. )

Przyjmując, że pierwsza macierz jest macierzą projekcji P, związek pomiędzy punktem przestrzennym Q i odpowiadającym mu punktem na obrazie q wyraża się wzorem

( 6.**Błąd! Użyj karty Narzędzia główne, aby zastosować 0 do tekstu, który ma się tutaj pojawić.**. )

Macierz P ma wymiary 3x4 i jest złożeniem wszystkich transformacji jakie konieczne są do przejścia pomiędzy układami 3D i 2D.

W trakcie omawiania procesu rzutowania perspektywicznego w tym akapicie skorzystano ze współrzędnych jednorodnych oraz przekształceń geometrycznych mimo, że zagadnienia te nie były wcześniej omawiane,. Ich znajomość jest niezbędna do zrozumienia całego procesu rzutowania, stąd kolejny akapit poświęcony jest właśnie nim.

Transformacje i współrzędne jednorodne

W szeroko rozumianej grafice komputerowej, robotyce i nie tylko, przekształcenia w przestrzeni i stanowią jedne z fundamentalnych operacji. Należą do nich m.in.:

* Przesunięcie

( 7.**Błąd! Użyj karty Narzędzia główne, aby zastosować 0 do tekstu, który ma się tutaj pojawić.**. )

* Obrót

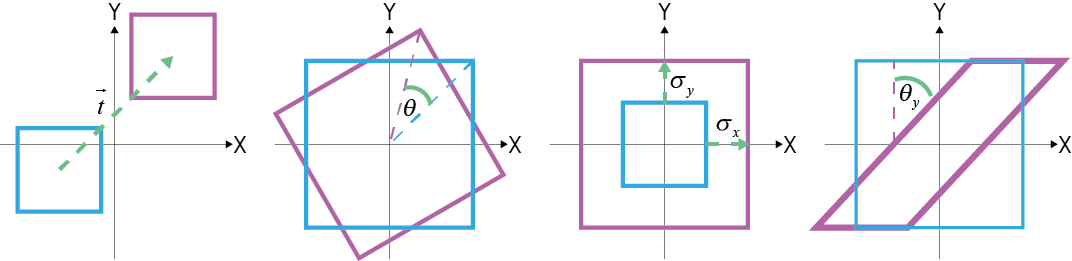
( 8.**Błąd! Użyj karty Narzędzia główne, aby zastosować 0 do tekstu, który ma się tutaj pojawić.**. )

* Skalowanie

( 9.**Błąd! Użyj karty Narzędzia główne, aby zastosować 0 do tekstu, który ma się tutaj pojawić.**. )

* Pochylenie

( 10.**Błąd! Użyj karty Narzędzia główne, aby zastosować 0 do tekstu, który ma się tutaj pojawić.**. )



Rysunek 1.1.1.3 Podstawowe przekształcenia geometryczne na płaszczyźnie.   
Kolejno od lewej: przesunięcie, obrót, skalowanie, przycinanie.

Podczas pracy z przekształceniami geometrycznymi korzysta się głównie z rachunku macierzowego. Jest to podyktowane prostotą zapisu i efektywnością obliczeń, zwłaszcza w obszarze grafiki komputerowej. Położenie punktu można wtedy potraktować jako wektor n liczb, gdzie n we współrzędnych kartezjańskich jest równe wymiarowi przestrzeni.

W takim układzie współrzędnych, pokazane na rys. 1.1.1.4 transformacje można zapisać w postaci macierzy transformacji. Wynikiem zastosowania przekształcenia obrotu, skalowania lub pochylenia jest iloraz macierzy transformacji i wektora położenia punktu. W przypadku translacji nie ma innej możliwości zapisu jak tylko suma dwóch wektorów: położenia i przesunięcia. Ta niejednolita notacja uniemożliwia wykonanie złożenia np. translacji i obrotu, czyli zapisania tych dwóch przekształceń w postaci jednej macierzy.

Rozwiązaniem tego problemu jest użycie współrzędnych jednorodnych, w których punkt w n-wymiarowej przestrzeni posiada n+1 współrzędnych.

( 11.**Błąd! Użyj karty Narzędzia główne, aby zastosować 0 do tekstu, który ma się tutaj pojawić.**. )

( 12.**Błąd! Użyj karty Narzędzia główne, aby zastosować 0 do tekstu, który ma się tutaj pojawić.**. )

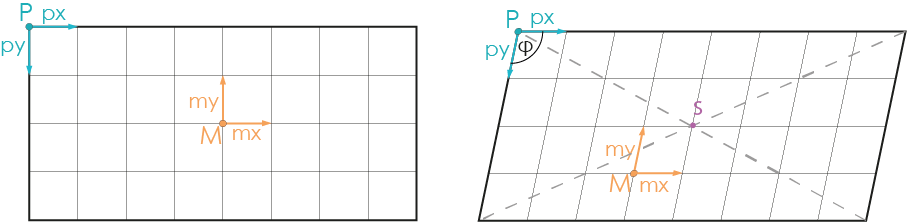
Użycie współrzędnych jednorodnych pozwala zapisać każdą transformację w przestrzeni w postaci macierzy 3x3, a w przestrzeni w postaci macierzy 4x4. W konsekwencji możliwe jest złożenie dowolnej liczby przekształceń zapisując je jako macierz będącą iloczynem wybranych macierzy transformacji.

Układy współrzędnych

Na początku tego rozdziału wprowadzono dwa układy współrzędnych, kamery UWC i metryczny obrazu UWMO, które związane są ściśle z rzutowaniem perspektywicznym. Przedstawiono również w jaki sposób przekształcenia geometryczne pozwalają przejść z jednego układu współrzędnych do drugiego.

W układzie UWC zdefiniowano położenie kamery jako początek tego układu, a także wyrażono współrzędne punktu przestrzennego Q który widzi kamera. Naturalnie, kamera i obiekty które rejestruje nie są najczęściej ze sobą połączone i nie poruszają się razem ze sobą. Wynika stąd, że punkt Q nie należy do układu UWC, może natomiast – dzięki przedstawionym wcześniej transformacjom – zostać wyrażone jego położenie względem tego układu. Zarówno układ współrzędnych UWC jak i obiekty które rejestruje kamera definiuje się w globalnym układzie współrzędnych UWG.

Na obrazie zarejestrowanym przez kamerę, położenie książki można wyrazić za pomocą jednostek metrycznych w układzie UWMO lub za pomocą pikseli - w układzie współrzędnych UWPO. Jest to uzasadnione, ponieważ rolę płaszczyzny obrazu w aparacie pełni najczęściej matryca CCD lub CMOS. W dużym uproszczeniu są to macierze bardzo małych prostokątnych elementów światłoczułych. Zarejestrowany przez nie obraz jest więc gęstą macierzą pojedynczych prostokątów – pikseli.



Rysunek 1.1.1.4 Matryca CMOS/CCD zbudowana z 8x4 prostokątnych elementów światłoczułych.   
Układ współrzędnych UWPO zaczepiony jest w lewym górnym rogu matrycy.   
Oś optyczna przechodzi przez początek układu UWMO, który na rys. a znajduje się w   
środku płaszczyzny obrazu S, a na rys. b jest względem niego przesunięty.

W idealnym przypadku – rysunek 1.1.1.2. a - matryca CCD/CMOS jest:

* zbudowana z kwadratowych elementów światłoczułych
* ustawiona prostopadle do osi optycznej, która przechodzi przez jej środek

W rzeczywistości, tak jak ilustruje to rysunek 1.1.1.2 b matryca może:

* posiadać elementy światłoczułe w kształcie równoległoboku
* nie być ustawiona prostopadle do osi optycznej
* oś optyczna może nie przechodzić przez środek matrycy

Przejście z UWG do UWPO

W poprzedniej części tego rozdziału omówiono cztery układy współrzędnych jakie towarzyszą w pracy z modelem kamery otworkowej. Przedstawiono również macierz projekcji P która pozwalała przejść z układu współrzędnych kamery do układu metrycznego obrazu.

Docelowo macierz P powinna wiązać położenie punktu przestrzennego Q zdefiniowanego w układzie globalnym, z położeniem rzutu tego punktu na obrazie q, którego współrzędne wyrażone będą w pikselach, tj. w UWPO. W tym celu należy, przejść przez wszystkie wymienione do tej pory układy współrzędnych, w sposób jaki ilustruje poniższy schemat.

Rysunek 1.1.1.5 Schemat przejścia z układu globalnego do pikselowego obrazu.

Przedstawiony do tej pory model kamery otworkowej, był przypadkiem idealnym, w którym matryca, tak jak na rys. 1.1.1.2 była ustawiona prostopadle do osi optycznej, ta przebijała ją dokładnie w połowie wysokości i szerokości, a elementy światłoczułe były kwadratami. W rzeczywistości założenia te są często błędne, dlatego należy uzupełnić dotychczasowy model tak, aby lepiej odzwierciedlał rzeczywisty proces rzutowania.

Chcąc wyrazić położenie punktu na obrazie q nie w jednostkach metrycznych jak dotychczas ale w pikselach konieczne jest przejście z układu UWMO do UWPO. Wiąże się z tym użycie transformacji:

* skalowania

Matryca aparatu ma swoje wymiary fizyczne, np. 23,6 x 15,7 mm. Jej rozmiar jest również określony poprzez rozdzielczość, np. 5184 x 3456 pikseli. Stosunki tych wielkości, odpowiednio dla pierwszej i drugiej współrzędnej pozwalają określić położenie punktu na obrazie q, zarówno w jednostkach metrycznych, jak również w pikselach

* translacji

Układ współrzędnych UWMO zaczepiony jest w punkcie, w którym oś optyczna przebija płaszczyznę obrazu, co w idealnym przypadku ma miejsce w połowie wysokości i szerokości matrycy. Z przyczyn technicznych środek matrycy może być przesunięty względem osi głównej. O ile nie wpływa to na położenie punktu q w układzie UWMO, którego środek zaczepiony jest w miejscu, gdzie oś optyczna przebija płaszczyznę obrazu, o tyle zmienia to współrzędne punktu q w układzie UWPO, który zaczepiony jest w lewym górnym rogu obrazu. Inaczej mówiąc,